Jordan 標準形の数値計算について(科学技術における数値計算の理論と応用II)

鈴木, 俊夫; 渡邊, 栄己子; 明, 愛萍

数理解析研究所講究録
990 巻 1997 年 52-61

Jordan 標準形の数値計算について

鈴木俊夫 (*Toshio SUZUKI*, 山梨大学教育学部)
渡邉栄己子 (*Emiko WATANABE*, 山梨大学大学院教育学研究科 *M2*)
明 愛萍 (*Aiping MIN*, 山梨大学大学院教育学研究科 *M2*)

§0. はじめに.

行列の Jordan 標準形を求めることは数学的理論としては完成されている。計算機による実用的な計算方法の理論的結果は Golub and Wilkinson [4], Chatelin [3] に、ほぼまとめられているといえよう。[4] において、有限精度の計算機上では、与えられた行列について「固有値が近接し、対応する固有ベクトルが平行に近い」状態と「重複固有値で退化した一般固有ベクトルをもつ」場合との区別が困難であることから Jordan 標準形を厳密に求めることは事実上不可能であることが述べられている。それでも、S.V.D.(Singular Value Decomposition) を基礎とした理論的考察をもとに、きれいな形が得られる場合ならば計算できる方法が示されている。S.V.D. をもとにした A の固有値計算は重複固有値の場合は非常に精度が落ちる。[3] ではその欠点を避けるために統計的なアプローチで固有値を確定するという工夫をしている。

我々は、Suzuki [7], [8] で提案された「射影作用素の積分表示の円周等分点による数値積分の理論」を用いることにより、非対称で２次以上の Jordan ブロックをもつ行列について、その重複固有値の近似値の情報から、より精度の高い固有値を求め、固有ベクトル・一般固有ベクトルを求める理論とアルゴリズムを得ることが出来たのでそれについて報告する。ここでの特徴としては、固有値の近似値からの出発により２次の速さで固有値に収束することがあげられる。

§1. では、線形写像の一般論からの準備として n 次行列 A の Resolvent $R(\zeta) = (A-\zeta I)^{-1}$ の Laurent 展開や、射影作用素の積分表示に対する円周等分点をとった数値積分の表示を示す。

§2. では、数値計算の理論的根拠を示す定理と命題を述べる。

§3. では、重複度 p の固有値 λ_i と対応する Jordan ブロックに対する一般固有ベクトルの数値計算のためのアルゴリズムと、数値実験の結果を示す。

§4. では、まとめと今後の課題を述べる。

§1. 線形写像の一般論からの準備.

A は n 次の (非正規) 行列とし、λ_j をその固有値とする。Resolvent $R(\zeta) = (A-\zeta I)^{-1}$ の λ_j の回りでの Laurent 展開は次のように表すことが出来る。(cf. T.Kato [6])

$$(A-\zeta I)^{-1} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (\zeta-\lambda_j)^k C_k \qquad \left(\text{where} C_k = \frac{1}{2\pi\imath}\oint_\Gamma (\zeta-\lambda_j)^{-k-1} R(\zeta)\,\mathrm{d}\,\zeta\right)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{-2} (\zeta-\lambda_j)^k C_k + (\zeta-\lambda_j)^{-1} C_{-1} + \sum_{k=0}^{\infty} (\zeta-\lambda_j)^k C_k$$

$(C_{-1}=-P_j,\ C_{-2}=-D_j,\ C_0=S_j$ と置くと)

$$=-\sum_{k=1}^{\infty}(\zeta-\lambda_j)^{-k-1}D_j^k-(\zeta-\lambda_j)^{-1}P_j+\sum_{k=0}^{\infty}(\zeta-\lambda_j)^kS_j^{k+1}.$$

このとき、$P_j^2=P_j$(P は射影作用素であることを示す), $P_jD_j=D_jP_j=D_j$, $P_jS_j=S_jP_j=0$ が成り立つ。D_j は Jordan 標準形の λ_j のブロックの非対角成分の行列に対応する nilpotent operator である。(i.e. $\exists p$ s.t. $D_j^p=0,\ D_j^{p-1}\neq 0$.)
P_j, D_j^l は、ベクトル z に対して次のような積分で表される。

$$P_jz=\frac{-1}{2\pi\imath}\oint_{\Gamma}(A-\zeta I)^{-1}z\,\mathrm{d}\zeta\,,\qquad D_j^lz=\frac{-1}{2\pi\imath}\oint_{\Gamma}(\zeta-\lambda_j)^l(A-\zeta I)^{-1}z\,\mathrm{d}\zeta.$$

もしも、λ_j が p 次元の Jordan ブロックを持つ固有値であるなら、その一般固有ベクトルは、$\{P_jz, D_jz,\cdots,D_j^{p-1}z\}$ を計算すればよい。P_jz の近似計算の方法とその評価の理論は [7] に示されている。

< Pz , Dz の数値積分 >

n 次行列 A の固有値を $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 、対応する固有ベクトルを $\phi_1,\cdots,\phi_n$ とする。複素平面上に中心 λ , 半径 r の(周上に固有値がないような)円 C をとり、さらに円 C 上に m 等分点 μ_j $(j=1,\cdots,m)$ をとる。これを円 C 上の m 個の円周等分点と呼ぶ。(i.e. $\mu_j=\lambda+\tau\omega^{j-1},\ j=1,\cdots,m.$ ただし $|\tau|=r,\ \omega=\exp(\frac{2\pi\imath}{m})$.)

この円周等分点を用いた、次の式で定める逆反復法の一般化を多重逆反復法という。

$$\widetilde{P_C}z=\frac{-\tau}{m}\sum_{j=1}^{m}\omega^{j-1}(A-\mu_jI)^{-1}z \tag{0.1}$$

<注1>. 関数解析の一般論で知られているように円 C 内の固有値に対応する固有空間への射影作用素 $P_C: z\to P_Cz$ は次のように表され、(0.1) の右辺はこれを数値積分の形で(定数を除いて)表したものと見なすことが出来る。

$$P_Cz=\frac{-1}{2\pi\imath}\oint_{C}(A-\zeta I)^{-1}z\,d\zeta.$$

<注2>. $z=\sum_{k=1}^{n}a_k\phi_k$ とすると、(0.1) の右辺は τ を一般に複素数として、次のように表すことが出来る。(cf. Suzuki [7])

$$\widetilde{P_c}z=-\sum_{k=1}^{n}\frac{\tau^m}{(\lambda_k-\lambda)^m-\tau^m}a_k\phi_k.$$

これにより $m\to\infty$ のとき、$\left|\frac{\tau}{\lambda_k-\lambda}\right|>1$ をみたす円 C 内の固有値 λ_k に対応する固有ベクトルはそのまま残り、それ以外の固有値に対応する固有ベクトル成分は $\mathrm{O}(\left|\frac{\tau}{\lambda_k-\lambda}\right|^m)$ で小さくなる。

<注３>. $D_\lambda^l z = \dfrac{-1}{2\pi\imath}\oint_C (\zeta-\lambda)^l (A-\zeta I)^{-1} z\, d\zeta$ より、$P_C z$ に対応する (0.1) に相当する式は次のようになる。ただし、$\widetilde{D_\lambda}^0 z = \widetilde{P_C} z$ である。

$$\begin{aligned}\widetilde{D_\lambda}^l z &= \frac{-\tau^{1+l}}{m}\sum_{j=1}^{m}\omega^{(l+1)(j-1)}(A-\mu_j I)^{-1} z \\ &= -\sum_{k=1}^{n}\frac{\tau^{m-l}(\lambda_k-\lambda)^l}{(\lambda_k-\lambda)^m-\tau^m} a_k\phi_k.\end{aligned}$$

§２．命題と定理.

< 数値積分表示 $\widetilde{P}$, $\widetilde{D}$ の性質 >

$B^{-1}AB=\tilde{A}$ が Jordan 標準形となるような正則行列 B を取り、 $\tilde{u}=B^{-1}u$ とおくと $Au=\lambda u$ と $\tilde{A}\tilde{u}=\lambda\tilde{u}$ は、固有値問題を考える上で同値である。以下の議論において A が Jordan 標準形であるとしても一般性を失わないので、以下の A は Jordan 標準形で与えられているものとする。

λ_h が A の固有値で p 次の Jordan ブロックをもつものとし、これに対応する A の不変部分空間を $H(\lambda_h)$ と表すとき次の命題が成り立つ。

定理１ ．A の各 Jordan ブロックの中の最大次数を p' とし、$\nu=\lambda-\lambda_h$, $M=\min\limits_{\lambda_k\neq\lambda_h}|\lambda_k-\lambda|$, $|\nu|<|\tau|<\dfrac{M}{2}$ とする。$\left|\dfrac{\tau}{M}\right|^{m-p'+1}=\rho$ である m を定めたとき、初期ベクトル z に対して $\widetilde{P_C}z$, $\widetilde{D_\lambda}^l z$ $(l=1,\cdots,p-1)$ は $O(\rho)$ の相対誤差を除いて $H(\lambda_h)$ に含まれる。

この定理は<注１>から予想される結果であるが、証明は次の２つの命題（命題２と命題３）から容易に導くことが出来る。

次の $\widetilde{D_{\lambda'}}^l z$ を定義する。$\lambda=\lambda'$ のときは<注３>の $\widetilde{D_\lambda}^l z$ と一致する。

$$\widetilde{D_{\lambda'}}^l z = \frac{-\tau}{m}\sum_{j=1}^{m}\omega^{j-1}(\mu_j-\lambda')^l(A-\mu_j I)^{-1} z. \tag{0.2}$$

特に、$l=0$ のときは　$\widetilde{P_C}z = \dfrac{-\tau}{m}\displaystyle\sum_{j=1}^{m}\omega^{j-1}(A-\mu_j I)^{-1} z$ である。

命題２ ．$\nu'=\lambda'-\lambda_h$ とするとき、次の式が成り立つ。ただし、$\widetilde{D_{\lambda_h}}^0 z=\widetilde{P_C}z$ とする。

$$\widetilde{D_{\lambda'}}^{p-1} z = \sum_{l=0}^{p-1}\binom{p-1}{l}(-\nu')^{p-l-1}\widetilde{D_{\lambda_h}}^l z.$$

命題２' ．$\widetilde{D_{\lambda'}}^l$ についても次の式が成り立つ。

$$\widetilde{D_{\lambda'}}^l z = \sum_{k=0}^{l}\binom{l}{k}(-\nu')^{l-k}\widetilde{D_{\lambda_h}}^k z,\qquad l=1,2,\cdots.$$

$\widetilde{D_{\lambda_h}}^{l} z = \dfrac{\tau}{m}\displaystyle\sum_{j=1}^{m}\omega^{j-1}(\mu_j-\lambda_h)^l(A-\mu_j I)^{-1}z$ と表せることより、$(A-\mu_j I)^{-1}$ を具体的に計算して $\widetilde{D_{\lambda_h}}^{l}$ の成分表示をする。その行列の (r,s) 成分を $(\widetilde{D_{\lambda_h}}^{l})_{r,s}$ として表す。

説明を簡単にするために λ_h を固有値とする Jordan ブロックの部分が A の左上の p 行 p 列であるとする。

命題3 ．$q=s-r+1\,(r\le s)$ とすると、行列 $(\widetilde{D_{\lambda_h}}^{l})$ の成分は次のようになる。

(1) $r\le s\le p$ のとき

$$
\begin{aligned}
&q\le l \quad \text{ならば}\ (\widetilde{D_{\lambda_h}}^{l})_{r,s} = 0,\\
&q=l+1\ \text{ならば}\ (\widetilde{D_{\lambda_h}}^{l})_{r,s} = \frac{1}{1-(-\frac{\nu}{\tau})^m},\\
&q>l+1\ \text{ならば}\ (\widetilde{D_{\lambda_h}}^{l})_{r,s} = O\Big((\frac{\nu}{\tau})^{m-(q-l)+1}\Big).
\end{aligned}
$$

(2) $p<r=s$ のとき　$(\widetilde{D_{\lambda_h}}^{l})_{r,r} = O\Big((\dfrac{\tau}{M})^m\Big).$

(3) $p<r<s$ のとき

λ_h 以外の固有値で p' 次の Jordan ブロックがある場合は　$(\widetilde{D_{\lambda_h}}^{l})_{r,s} = O\Big((\dfrac{\tau}{M})^{m-l}\Big),\quad (l<p').$

それ以外の r,s については　$(\widetilde{D_{\lambda_h}}^{l})_{r,s} = 0.$

命題3.の結果で $\widetilde{D_{\lambda_h}}^{l}$ の左上の p 次の Jordan ブロックに対応する部分を表すと、

$$
\begin{bmatrix}
0 & \cdots & 0 & N_h & O\Big((\frac{\nu}{\tau})^{m-1}\Big) & \cdots & O\Big((\frac{\nu}{\tau})^{m-p+l+1}\Big)\\
\vdots & \ddots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\
\vdots & & \ddots & & \ddots & \ddots & O\Big((\frac{\nu}{\tau})^{m-1}\Big)\\
\vdots & & & \ddots & & \ddots & N_h\\
\vdots & & & & \ddots & & 0\\
\vdots & & & & & \ddots & \vdots\\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0
\end{bmatrix}
$$

となる。ただし、$N_h = \dfrac{1}{1-(-\frac{\nu}{\tau})^m}.$

＜注4＞. 特に、$(\widetilde{D_{\lambda_h}}^{p-1})_{1,p} = \dfrac{1}{1-(-\frac{\nu}{\tau})^m}$　であり、命題3.の(2)(3)から $p<r,s$ に対して

$$(\widetilde{D_{\lambda_h}}^{l})_{r,s} = O\Big((\frac{\tau}{M})^{m-p'+1}\Big)\quad \text{となる。}$$

<注５>. 命題２'. と命題３. から

$$\|\widetilde{D_{\lambda'}}^{l} z\| = \begin{cases} O(\nu'^{\,l-p+1}) & (l \geq p) \\ O(1) & (l \leq p-1) \end{cases} \quad となる。$$

$\widetilde{D_{\lambda_h}}^{l}$ の左上の $p \times p$ 行列の部分以外は、$O(\rho)$ や 0 なので、初期ベクトルについても p 次までを考えればよいことになる。以下、$\widetilde{D_{\lambda_h}}^{l}$ は λ_h に関する Jordan ブロックに対応するブロック つまり $p \times p$ 行列として考える。

A は非対称行列であるから、$u = \widetilde{D_{\lambda'}}^{p-1} z$, $v^* = z^* \widetilde{P_C}$ とし、Rayleigh 商を $\tilde{\lambda} = \dfrac{v^* A u}{v^* u}$ と表す。$\nu' = \lambda' - \lambda_h$ とすると次の命題が成り立つ。

命題４ ．λ' と Rayleigh 商 $\tilde{\lambda}$ 、実際の固有値 λ_h との関係は次のように表される。

$$\begin{aligned} \tilde{\lambda} &= \lambda_h + (p-1)(-\nu') + O(\nu'^2) \\ &= \lambda_h + (p-1)(\lambda_h - \lambda') + O(\nu'^2). \end{aligned}$$

命題４. より、次の定理が得られる。

定理５ ．λ_h の近似の形として、次の式が成り立つ。(ただし、固有値が孤立しているとき)

$$\lambda_h + O(\nu'^2) = \frac{(p-1)\lambda' + \tilde{\lambda}}{p}.$$

<注６>. 命題４. の証明から $v^* = z^* \widetilde{P_c}$ でなく、$u^* = z^* \widetilde{D_{\lambda'}}^{p-1}$ でも成り立つことがわかる。実際の数値計算では、$\tilde{\lambda} = \dfrac{u^* A u}{u^* u}$ を用いる。

<注７>. $l \geq p$ のとき、次の式のように表せる。

$$\lambda_h + O(\nu'^2) = \frac{(p-1)\lambda' + (l-p+2)\tilde{\lambda}}{l+1}$$

§３. アルゴリズムと数値計算例.

< 重複度 p の固有値 λ_i と、対応する Jordan ブロックにおける一般固有ベクトルの数値計算のアルゴリズム>

(1) λ_i の近似値を λ とする。λ と λ_i を含む円 C_i 上に円周等分点 μ_j , $j=1,\cdots,m$ をとる。(m は要求精度をもとに決定される) ただし、$\omega = \exp(\dfrac{2\pi\imath}{m})$.

(2) 初期ベクトル z をとり $W_j = (A - \mu_j I)^{-1} z$, $j=1,\cdots,m$ を解く。

(3) $\widetilde{D}^l z = \displaystyle\sum_{j=1}^{m} \omega^{j-1} (\mu_j - \lambda)^l W_j$ を計算する。$\|\widetilde{D}^l z\|, l = 1, 2, \cdots$ のノルムの変化を見て、急に小さくなる l が出たときに $l = p-1$ として p を定める。

(3') $l = p-1$ として $\widetilde{D}^l z = \sum_{j=1}^{m} \omega^{j-1}(\mu_j - \lambda)^l W_j$ を計算する。

(4) $u_{p-1} = \dfrac{\widetilde{D}^{p-1} z}{\|\widetilde{D}^{p-1} z\|}$ とおき、$\tilde{\lambda} = u_{p-1}^* A u_{p-1}$ を計算する。

(5) $\lambda = \tilde{\lambda}$ ならば次へ、そうでないときは $\lambda = \dfrac{(p-1)\lambda + \tilde{\lambda}}{p}$ として (3') へ戻る。

(6) λ は固有値。(3') の式で $l = 0, 1, \cdots, p-1$ から計算される $u_0, u_1, \cdots, u_{p-2}$ が一般固有ベクトル、u_{p-1} が固有ベクトルとして得られる。

ただし、(3) で「急に小さくなる l」が定め難いときは、p の値が明確に定まるまで (3') でなく (3) に戻る。

<注８>. λ が固有値に近くなると (3) における p の値は明確に定まる。

<注９>. 線形方程式は m 個の方程式を一回だけ解き、(3) 以下の繰り返しの際はその一次結合を取り直すだけである。

<数値計算例>

２つ以上の対角ブロックに対応する固有値 λ が少なくとも１つあるとき、行列 A は derogatory であるという。そして derogatory な A は λ において対角ブロックの数だけ split しているという。

Chatelin [3] で、彼らの方法の検証のために示された過去に取り上げられた例がすべて我々の方法で計算することが出来た。

ここでは、[3] の ex. 9.5 の、固有方程式が $(\lambda-1)(\lambda-2)^5(\lambda-3)^4 = 0$ で $\lambda = 2$ は２次と３次のブロックに split 、$\lambda = 3$ は２次と２次のブロックに split している場合と、ex. 9.6 の、固有方程式が $(\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda-7)^6 = 0$ で $\lambda = 7$ は６次のブロックである場合の２つの例についての計算結果を示す。

- split しているかどうかの判断.

  複数の初期ベクトルに対して $D^l z$, $l = 0, 1, \cdots, p-1$ を計算する。それらのベクトルに対して Schmidt の直交化をして１次独立な成分が残っているか否かを調べる。

  ◇ split していない ‥ 正規直交化をして残ったベクトルの本数と最大のブロックの次数が同じとき。

  ◇ split している ‥‥ ベクトルの本数の方が最大のブロックの次数より多いとき。

- 正規直交化のとき残すか否かの基準.　　$\|\phi\| < 0.00001$

- 近似固有値 λ が２乗の速さ (下線部) で固有値 λ_h に収束していることがわかる例。

* *ChatelinExample* 9.5

$(x-1)(x-2)^5(x-3)^4=0$

$m=40,\ \lambda=2.04,\ |\tau|=0.3$

λ の値

0回目	$\underline{2.0}4$
1回目	$\underline{2.0}19589187242883$
2回目	$\underline{2.00}1923578143922$
3回目	$\underline{2.0000}22214767584$
4回目	$\underline{2.00000000}3024978$
5回目	$\underline{2.000000000000000}$

* *ChatelinExample* 9.6

$(x+1)(x+2)(x-7)^6=0$

$m=50,\ \lambda=7.1,\ |\tau|=2$

λ の値

0回目	$\underline{7}.1$
1回目	$\underline{6.999}816264141329$
2回目	$\underline{6.9999999}84387133$
3回目	$\underline{7.000000000000000}$

＜注１０＞. $l \geq p$ のときにも、＜注７＞.のような形で近似できるのだが、数値計算のプログラムでは $l=p-1$ の近似法を使っているので、よりよい近似とはいえない。$l=p+\alpha,\ \alpha \geq 0$ とすると、その誤差は次のように表せる。

$$\lambda_h + O(\nu'^2) = \frac{l\lambda' + \tilde{\lambda}}{l+1} + \frac{\alpha+1}{\alpha+2}(-\nu').$$

強制的に λ' における最大ブロックの次数を $l=p$ とすると $\frac{1}{2}(-\nu')$ ずつ近似する。また同様に、次数を $l=p+1$ とすると $\frac{2}{3}(-\nu')$ ずつ近似する。

* *ChatelinExample* 9.6 　　$(x+1)(x+2)(x-7)^6=0$

$m=50,\ \lambda=7.1,\ |\tau|=2$

	$l=p$ のとき $\frac{1}{2}(-\nu')$ ずつ	$l=p+1$ のとき $\frac{2}{3}(-\nu')$ ずつ
λ の値 0回目	7.1	7.1
1回目	7.052152	7.067408
2回目	7.026686	7.045282
3回目	7.013506	7.030345
4回目	7.006795	7.020301
5回目	7.003408	7.013565
6回目	7.001707	7.009058
7回目	7.000854	7.006045
8回目	7.000427	7.004033

- 固有値 λ_h における最大ブロックの次数の判断をする例.

以下に示す数値は $\|\widetilde{D_{\lambda'}}^{l} z\|^2$ の値であり、$\|\widetilde{D_{\lambda'}}^{l} z\|^2 / \|\widetilde{D_{\lambda'}}^{0} z\|^2 > 0.001$ を満たす最大の l を p で示し、λ' における最大ブロックの次数とする。ただし、「$\|\widetilde{D_{\lambda'}}^{l} z\|$ の値が急に小さくなる l 」を定める方法は、状況により別の基準を用いる方が よい場合もある。

次の例は、λ を固有値に取ると p が明確に定まることを示している。

$* \ ChatelinExample\ 9.5$

$$(x-1)(x-2)^5(x-3)^4=0$$

$$m=40,\ \lambda=2,\ |\tau|=0.3$$

$$Res=0.125\ D-12$$

$\|\widetilde{D_\lambda}^l z\|^2$ の値

$l=0$	$0.1937\ D+7$
$l=1$	$0.1752\ D+6$
$l=2$	$0.3092\ D+6$
$l=3$	$0.2703\ D-24$
$l=4$	$0.6005\ D-25$

$$p=3$$

$* \ ChatelinExample\ 9.6$

$$(x+1)(x+2)(x-7)^6=0$$

$$m=50,\ \lambda=7,\ |\tau|=2$$

$$Res=0.517\ D-13$$

$\|\widetilde{D_\lambda}^l z\|^2$ の値

$l=0$	$0.1055\ D+4$
$l=1$	$0.5136\ D+5$
$l=2$	$0.1792\ D+7$
$l=3$	$0.6966\ D+8$
$l=4$	$0.2609\ D+10$
$l=5$	$0.4354\ D+7$
$l=6$	$0.2445\ D-19$
$l=7$	$0.2817\ D-18$

$$p=6$$

ここで Res は一般固有ベクトルの残差であり、$Q=[u_0,u_1,\cdots,u_{p-1}]$ としたとき

$$Res=\left\|AQ-Q(Q^*AQ)\right\| \quad \text{で定められる。}$$

§4．まとめと今後の課題.

＜まとめ＞

- 与えられた行列 A が重複固有値を持つ場合の固有値計算でも、射影作用素の積分表示の円周等分点による数値積分を用いることで、精度よく計算することが出来る。
- 特徴として以下の 3 点があげられる。
  - ◇ 固有値が正確にわからないときでも、大まかな近似値を用いることにより、2 乗の速さで固有値へ収束することが出来る。これは、Rayleigh 商反復法の重根固有値の場合への一般化といえる。m 個の線形方程式を 1 回解いておいて、反復はその解の一次結合を取り直すことを繰り返すだけであるので、計算量はむしろ少なくなる。
  - ◇ 線形方程式の解の精度が固有値・固有ベクトルの精度に直接に反映する方法である。したがって、この部分だけ高精度で計算すれば必要なだけの精度が得られる。
  - ◇ Null space の次元 p の決定方法として既知の方法では得られない有効性を持っている。

＜今後の課題＞

- いろいろなサイズの行列についての数値実験.
- Jordan 構造の安定性と数値計算可能性についての摂動論的解析.
- 固有値が近く、対応する固有ベクトルが平行に近い形で表される場合についての理論的解析と数値実験.

◇ 固有値 λ_h に近接する固有値 λ_k が存在する場合.(円 C の中に λ_h, λ_k がある場合)

$R(\zeta)$ を有理型関数として次のように表すことが出来る。ただし s は異なる固有値の数, m_h は derogatory の次数.

$$R(\zeta) = -\sum_{h=1}^{s}\Big((\zeta-\lambda_h)^{-1}P_h + \sum_{n=1}^{m_h-1}(\zeta-\lambda_h)^{-n-1}D_h^n\Big)$$

中心 λ の円に含まれる一般固有ベクトル $D_\lambda^l z$ は

$$\begin{aligned} D_\lambda^l z &= \frac{-1}{2\pi\imath}\oint_c(\zeta-\lambda)^l R(\zeta)z\,\mathrm{d}\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi\imath}\sum_{h=1}^{s}\Big(\oint_c(\zeta-\lambda)^l(\zeta-\lambda_h)^{-1}\,\mathrm{d}\zeta\,P_h z \\ &\qquad + \sum_{n=1}^{m_h-1}\oint_c(\zeta-\lambda)^l(\zeta-\lambda_h)^{-n-1}\,\mathrm{d}\zeta\,D_h^n z\Big) \end{aligned}$$

λ_h が円 C 内にあるとき、$\dfrac{1}{2\pi\imath}\oint_c(\zeta-\lambda)^l(\zeta-\lambda_h)^{-n-1}\,\mathrm{d}\zeta$ の数値積分は $(\lambda-\lambda_h)^{l-n}\binom{l}{l-n}+o$ であるから次のように表せる。

$$\widetilde{D_\lambda}^l z = \sum_{\lambda_h\in\bar{C}}\Big((\lambda_h-\lambda)^l\widetilde{P_h}z + \sum_{n=1}^{m_h-1}(\lambda_h-\lambda)^{l-n}\binom{l}{l-n}\widetilde{D_h}^n z\Big).$$

例えば、固有値 λ_2 に近接する固有値 λ_1 が (λ_1, λ_2 の重複度はそれぞれ $1, p$) あり、$\lambda=\lambda_2$ とすると、$0\le l\le p-1$ のときは $\widetilde{D_{\lambda_2}}^l z$ に $\widetilde{D_2}z$ の項が残り、$l>p$ のときは $\widetilde{D_{\lambda_2}}^l z = (\lambda_1-\lambda_2)^l\widetilde{P_1}z$ である。

よって、

$$\frac{\|\widetilde{D_{\lambda_2}}^{p+k}z\|}{\|\widetilde{D_{\lambda_2}}^{p+k+1}z\|} = \frac{|\lambda_1-\lambda_2|^{p+k}\|\widetilde{P_1}z\|}{|\lambda_1-\lambda_2|^{p+k+1}\|\widetilde{P_1}z\|} = \frac{1}{|\lambda_1-\lambda_2|} \qquad (k=0,1,\cdots)$$

となる。

こういうことを手掛かりとして、いろいろ調べてみることがありそうである。

参考文献

[1] 韓　太舜、伊理正夫, ジョルダン標準形, 東京大学出版会, (1982)

[2] シャトラン, F (伊理正夫, 伊理由美 訳), 行列の固有値, シュプリンガー・フェアラーク東京, (1993)

[3] Chatelin, F. and Frayssé, V., QUALITATIVE COMPUTING : Elements of a Theory for Finite Precision Computation. Lecture Notes for the Comett European Course, June 8-10, Orsay, (1993).

[4] Golub, G.H. and Wilkinson, J.H., Ill-conditioned eigensystems and computation of the Jordan canocical form, SIAM Review, 18, 4, 578-619, (1976).

[5] Kångström, B. and Ruhe, A., An algorithm for numerical computation of the Jordan canonical form of a complex matrix, ACM, 6, 3, 398-419, (1981).

[6] Kato, T., Perturbation Theory for Linear Operators, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, (1966).

[7] Suzuki, T., Inverse iteration method with multiple cyclotomically shifted parameters, JJIAM, 13, No.2, 289-310, (1996).

[8] Suzuki, T., 多重逆反復法の応用－部分空間法, 数理研講究録 944 「科学技術に於ける数値計算の理論と応用」,165-173,(1996).